Jak uporządkowany jest ten świat?

Cel spotkania:

zapoznanie z ciągiem Fibonacciego i jego występowaniem w przyrodzie, obserwowanie wzorów i zależności liczbowych, poznanie złotej spirali i złotej proporcji

Potrzebne materiały:

Ćwiczenie 1:

Karta pracy „ćw. 1 ciągi” – dla każdego dziecka, kartki rozcinamy na pół tak, w pierwszej części są ciągi łatwiejsze, w drugiej części ciągi trudniejsze

Ćwiczenie 2:

Prezentacja „ćw. 2 kwiaty Fibonacciego” (wydrukować lub wyświetlić z pliku)
jabłko, banan, ananas

Ćwiczenie 3:

Arkusz „ćw. 3 cecha wspólna” (wydrukować lub wyświetlić z pliku)
Arkusz „ćw. 3 spirala w huraganie” (wydrukować lub wyświetlić z pliku)
Arkusz „ćw. 3 spirala” (wydrukować lub wyświetlić z pliku)
Zdjęcia z plików „ćw. 3 słonecznik” – wydrukować lub wyświetlić z pliku

Ćwiczenie 4:

Kalkulator, centymetr krawiecko (kilka sztuk, jeden centymetr na 3 osoby)
Arkusz „ćw.4 ciasto na pizzę” dla każdego ucznia
Arkusz „ćw.4 wyniki dzielenia” dla nauczyciela
Arkusz „ćw. 4 tabelki do pomiarów” – jedna karka na 2-3 osoby
Arkusz „ćw. 4 katedra” – do wyświetlenia albo wydrukowania 1 egzemplarz

Przebieg zajęć:

Ćwiczenie 1. Jak uporządkowany jest nasz świat

Cele ćwiczenia: Zwrócenie uwagi, że nasz świat jest uporządkowany, zapoznanie z ciągami.

Rozejrzyjmy się po naszej sali, czy ona jest jakoś uporządkowana? (np. stoliki ustawione w rzędy po 3), okna w jednej linii, itp.

A jak wyjdziemy na korytarz szkolny, czy sale są uporządkowane? W jaki sposób? Wyobraźcie sobie, że idziecie do zupełnie nieznanej szkoły na konkurs i macie trafić do sali nr 23.

Czy uda Wam się tam trafić? Na co musicie zwrócić uwagę?

Wyobraźmy sobie, że wychodzimy dalej na ulicę, czy budynki są jakoś uporządkowane?

Wszystkie te ławki, okna sale, budynki tworzą tak zwane ciągi, coś jest na pierwszym miejscu, później coś jest na drugim miejscu itd., kolejne miejsca są zapełniane zgodnie z tą samą zasadą.

Teraz przyjrzymy się kilku ciągom. Czy wiecie, jak są one uporządkowane? Odgadnijcie zasadę i uzupełnijcie kolejne miejsca. Pierwszy ciąg analizujemy wspólnie, jakie liczby pojawiają się na kolejnych miejscach? Jak myślicie, jakie liczby pasują w pustych okienkach, żeby zachować tę zasadę?

Następnie pracujemy w małych grupach z ciągami – nauczyciel rozdaje pierwszy zestaw ciągów każdej grupie. Gdy grupa rozwiąże, otrzymuje kolejną część.

Rozwiązania:

- Kolejne liczby nieparzyste.
- Kolejne wielokrotności trójki zaczynając od 6
- Kolejne liczby o 4 mniejsze zaczynając od 42
- Dodajemy kolejne liczby naturalne
- Potęgi dwójki/liczby dwa razy większe
- Liczby z ciągu Fibonacciego

Na koniec grupy porównują swoje prace. (Nie muszą wszyscy wszystkiego zrobić, ważne jest, żeby zdobyli jakieś doświadczenie w tworzeniu ciągów.)

Ćwiczenie 2. Na tropie liczb Fibonacciego

Zatrzymajmy się przy ostatnim ciągu z poprzedniego ćwiczenia. Zapisujemy go w widocznym miejscu, np. na tablicy. Jaka nim rządzi zasada? Jak udało Wam się tę zasadę odkryć?
(Jeśli grupa nie ma pomysłu patrzymy na ciąg 2,4,6,8…, tu do ostatniej liczby dodawaliśmy 2 i tak powstawała nam kolejna liczba. A w ciągu 1,1,2,3,5,8,… co dodajemy do ostatniej liczby? Przedostatnią! Czyli do 2 dodajemy 1, do 3 dodajemy 2 itd.)

Powstał nam ciąg liczb nazywany przez matematyków ciągiem Fibonacciego. Zajmował się nim już ponad 800 lat temu włoski matematyk Fibonacci.

Okazuje się jednak, że liczby z ciągu Fibonacciego pojawiają się w otaczającym nas świecie częściej niż inne liczby.
Przedostatni ciąg (1,2,4,8,…) to liczba osób w kolejnych pokoleniach wstecz naszego ludzkiego drzewa genealogicznego.
Z kolei ciąg 1,1,2,3,5,8,…to liczba osobników w kolejnych pokoleniach przodków pszczół i mrówek!
Rodzina pszczół i mrówek to nie jedyne miejsce występowania liczb Fibonacciego w przyrodzie. Możemy się o tym przekonać licząc płatki w kwiatach albo przyglądając się owocom.
Pokazujemy kwiaty zebrane w prezentacji „Kwiaty Fibonacciego”

Liczb Fibonacciego można szukać również w owocach:
Banan – wykonajmy eksperyment: weźmy plasterek banana i lekko naciśnijmy jego brzegi, powinien uwidocznić się podział na 3 części. (*Uwaga! Im bardziej banan jest dojrzały, tym łatwiejsze jest uwidocznienie 3 części.*)
Jabłko – kroimy jabłko na pół w poprzek gniazda nasiennego, ile części widać przy gnieździe nasiennym?

Ananas – łuski ananasa układają się w spirale, spróbujmy pokazać palcem kilka takich spiral. Ile spiral jest na ananasie?

Ćwiczenie 3. Na tropie złotej spirali

Spójrzmy teraz na kilka pozornie różnych obiektów przyrodniczych (nauczyciel wyświetla plik „cecha wspólna ćw.3” lub pokazuje wydruk)
Obrazki te przedstawiają zupełnie różne obiekty przyrodnicze. Jakie (huragan „Sandy”, galaktyka, aloes, muszla).
Czy mają one jakąś cechę wspólną? Jaką? (układ spiralny) Spirala widoczna na tych zdjęciach jest nazywana złotą spiralą i jest mocno związana z ciągiem Fibonacciego! Zaskakujące, prawda?
Przyjrzyjmy się dokładnie jednej z nich (wyświetlamy albo prezentujemy wydruk z pliku „spirala w huraganie ćw.3)
Na co podzielona jest spirala? Na kwadraty.
Spójrzmy na początek spirali, jakie są tam kwadraty? Dwa małe.
Jaki jest następny kwadrat? Jak jest zależność miedzy bokiem następnego a dwoma pierwszymi? Dwa boki najmniejszych kwadratów dają bok kolejnego! Czy coś podobnego dziś już było?
Czym zatem mogą być długości kolejnych boków? To kolejne liczby z ciągu Fibonacciego!!!
Jest to lepiej widoczne na planszy „ćw. 3 spirala” – wyświetlamy z pliku lub prezentujemy wydruk.

Na koniec pokazujemy zdjęcie słonecznika (wydruk lub wyświetlamy z pliku „ćw.3 słonecznik”).
Czy udaje Wam się tu dostrzec naszą spiralę?
Spiralnie układają się tu pąki (a później kwiaty i nasiona). Spirale mogą być skręcone w prawo albo w lewo. Okazuje się, że gdybyśmy policzyli spirale skręcone w prawo, to otrzymamy liczbę z ciągu Fibonacciego. Jeśli policzymy spirale skręcone w lewo będzie podobnie!

Ćwiczenie 4. Na tropie liczby φ i złotej proporcji

Uwaga! W zadaniu pojawiają się ułamki dziesiętne, czyli temat który zapewne jeszcze nie był realizowany na lekcji matematyki. Ułamki dziesiętne pojawiają się tu w bardzo wąskim zakresie, nie jest zatem potrzebna ich wcześniejsza znajomość.

Na chwilę zrobimy przerwę od ciągu Fibonacciego i porozmawiamy o proporcji.
Co to jest proporcja, czy ktoś z Was wie, jak wytłumaczyć czym jest proporcja? *(Jeśli nie ma pomysłu, to przechodzimy od razu do przepisu na ciasto na pizzę).*
Czy Wy albo ktoś z domowników robił kiedyś w domu pizzę? Jakie składniki są potrzebne na ciasto? *(Chwila rozmowy)*
Rozdajemy kartki z przepisem na pizzę *(dla każdego dziecka lub jedną na parę/małą grupę)*
Dla ilu osób wystarcza pizzy z tych składników? *(Dla 4 osób).*
Przychodzą do Was koledzy/koleżanki i potrzebujecie pizzę dla 8 osób. Ile mąki, wody, drożdży, soli i cukru trzeba użyć?
(Dyskusja, zapisujemy na kartkach składniki na porcję dla 8 osób)
Spójrzmy teraz na te listy składników, co my zrobiliśmy z ilością wody, mąki, drożdży itd.? (Dążymy do wniosku, że każdą ilość zwiększyliśmy dwukrotnie).
Czy moglibyśmy wziąć 1000g mąki, a wody tylko 250 g? Dlaczego?

W przepisie dla 4 osób było dwa razy więcej mąki niż wody, w przepisie dla 8 osób również mąki musi być dwa razy więcej niż wody, jeśli, chcemy, żeby ciasto się udało. Musimy zatem zachować proporcję pomiędzy składnikami ciasta.
Jakie są proporcje w naszym przepisie?
Mąki dwa razy więcej niż wody.
Cukru tyle samo co soli.
Wody 73 razy więcej niż drożdży itd.
Zawsze, kiedy będziemy robili ciasto musimy zadbać o takie proporcje pomiędzy składnikami, nie ważne, czy przygotowujemy pizzę dla 3 osób, 8 osób czy 20.

Proporcje występują w bardzo wielu miejscach, np. są ważne przy rysowaniu. Przyjmuje się, że głowa to ok. 1/8 długości ciała. Jeśli na rysunku głowa będzie stanowiła ¼ albo 1/20 to ten rysunek będzie wyglądał śmiesznie, nie będzie naturalny.
Okazuje się, że jest pewna proporcja, którą obserwujemy częściej niż inne i jest związana z ciągiem Fibonacciego!
Nauczyciel prezentuje materiał z pliku ćw.4 wyniki dzielenia – wydruk lub wyświetla z pliku.
Czy rozpoznajesz liczby w dwóch pierwszych kolumnach? Trzecia kolumna to wynik dzielenia liczby z drugiej kolumny przez liczbę z pierwszej kolumny. Przyjrzyjmy się kolejnym wynikom, czy widzisz w nich coś podobnego? *(wyniki w tabelce podane są z dokładnością do 6 miejsc po przecinku)*

		wynik dzielenia
2	3	3:2 = 1,5
3	5	5:3 = 1,666667
5	8	8:5 = 1,6
8	13	13:8 = 1,625
13	21	21:13 = 1,615385
…	…	…
144	233	233:144 = 1,618056
233	377	377:233 = 1,618026
…	…	…
10946	17711	17711:10946 = 1,618034

Wyniki kolejnych działań są do siebie co raz bardziej zbliżone, układają się naprzemiennie mniejsza liczba, większa liczba, znów mniejsza. Jeżeli weźmiemy dowolne dwie kolejne, bardzo duże liczby Fibonacciego, to wynik dzielenia większej przez mniejszą będzie coraz bliższy pewnej konkretnej liczbie, nazywanej φ (czytaj „fi”), początkowe cyfry tej liczby to 1,6180339887498948482…

Nauczyciel zapisuje na tablicy liczbę φ=1,6180339887…

W drugiej części eksperymentu dobierzcie się w pary lub trójki. Zmierzcie odpowiednie długości centymetrem krawieckim. Uzupełnijcie tabelkę informacjami o każdej osobie z waszego zespołu. Zadbajcie o dobry podział pracy (np. jedna osoba jest mierzona, druga mierzy, trzecia zapisuje liczby i wykonuje obliczenia) W ostatniej kolumnie, tak samo jak wcześniej, wpisz wynik dzielenia liczby z lewej kolumny, przez liczbę z prawej kolumny. Zwróć uwagę dzieci, żeby wszystkie pomiary były robione „PIONOWO”.

Długość od pępka do podłogi	Wzrost	Wynik dzielenia

Długość od łokcia do nadgarstka	Długość od łokcia do koniuszków palców	Wynik dzielenia

Długość od brody do czubka głowy	Długość od ramion do czubka głowy	Wynik dzielenia

Przyjrzyj się liczbom w ostatniej kolumnie w tych tabelkach. Co można o nich powiedzieć? Okazuje się, że jest bardzo dużo w otaczającym nas świecie takich odcinków, że jak podzielimy dłuższy przez krótszy, to otrzymamy wynik podobny do liczby φ=1,6180339887…
Szczególnie często takie długości pojawiają się w architekturze, przykładem jest katedra Notre Dame w Paryżu. Na zdjęciu katedry są zaznaczone kolorowe odcinki. Spróbujcie wskazać kilka par odcinków, które według Was po podzieleniu dadzą liczbę φ.

Zaproszenie

Zapraszamy Was do udziału w konkursie „Matplanetowa rodzina pszczół”. Zbierz 3-osobowy zespół i wymyślcie razem grę planszową, które będą związane z tematem dzisiejszych zajęć. Może wymyślicie jakiś własny ciąg, może w Waszym zadaniu wystąpią liczby z ciągu Fibonacciego, złota spirala albo liczba φ? A może macie jeszcze inny pomysł? Na Wasze prace czekamy w Centrach Edukacyjnych Matplanety do 8 stycznia 2020. Powodzenia!